Пособие по векторной алгебре

Сергей Матвеев

Содержание

1 Введение

Цель этого пособия состоит в том, чтобы помочь студентам первого курса математического и физического факультетов при изучении раздела "Векторная алгебра" курсов "Аналитическая геометрия", "Геометрия", "Аналитическая геометрия и линейная алгебра". Вместе с предельно кратким изложением теоретического материала пособие содержит приемы решения типовых задач, знание которых является необходимым условием понимания курса. В стандартных учебниках этим приемам не уделяется должного внимания. Часть задач снабжена решениями, часть – ответами. В конце

пособия приведен список типовых задач. Соответствующую теорию можно найти в любом учебнике по аналитической геометрии, см. [1, 2, 3, 4], а дополнительные задачи – в любом задачнике (например, в [5].

2 Векторы в декартовой системе координат

Декартова система координат на плоскости – это упорядоченная пара перпендикулярных прямых с выбранным на них одинаковым масштабом. Обычно рисуется так (см. рис. 1):

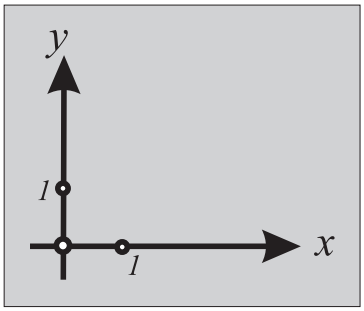


Рис. 1: Декартова система координат на плоскости

Если на плоскости фиксировать систему координат, то каждой точке A плоскости отвечают два числа – ее x-ая и y-ая координаты. Запись: $A = (x, y)$ или $A(x, y)$.

Расстояние между точками на (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой $d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Эта формула легко получается с помощью теоремы Пифагора.

Определение. *Вектором* называется упорядоченная пара точек.

Прокомментируем это определение. Обычно вектор представляют себе в виде стрелки. Однако, стрелку рисовать вовсе не обязательно. Достаточно знать две точки – начало вектора и его конец.

Определение. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, не лежащие на одной прямой, называются *равными*, если фигура $ABCD$ есть параллелограмм (т.е. прямая AB параллельна прямой DC, а прямая AD – прямой BC). См. рис. 2а. Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ лежат на одной прямой ℓ, то их равенство определяется с помощью третьего вектора MN, который не лежит на ℓ, рис. 2б.

Определение. Класс равных векторов называется *свободным вектором*.

Различие между векторами и свободными векторами не очень существенно. Очень часто (например, во фразе "любой вектор можно отложить от любой точки") под вектором понимается именно свободный вектор.

Следующее правило служит определением координат вектора:

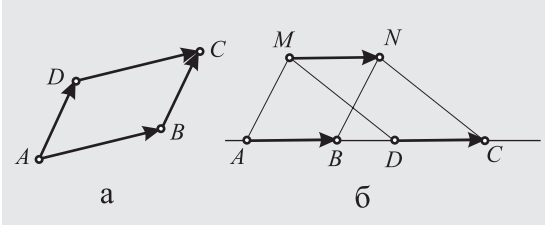


Рис. 2: Фигуры $ABCD, ABNM, DCNM$ должны быть параллелограммами

чтобы найти координаты вектора, *нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Другими словами, если $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Если вектор исходит из точки (0,0), то его координаты совпадают с координатами конца.

Из приведенного выше правила вытекает следующее:

– *Чтобы найти координаты конца, нужно к координатам начала прибавить координаты вектора.*

– *Чтобы найти координаты начала, нужно из координат конца вычесть координаты вектора.*

Сложение векторов определяется по *правилу параллелограмма*: вектор $\bar{a} + \bar{b}$ задается диагональю параллелограмма, стороны которого образованы векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, см. рис. 3. При сложении векторов их координаты складываются; при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

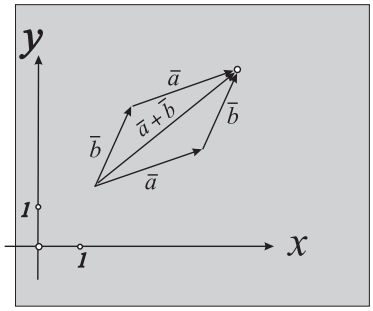


Рис. 3: Правило параллелограмма

3 Деление отрезка в данном отношении

Задача 1. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC : CB = 2 : 3$ (см. рис. 4)

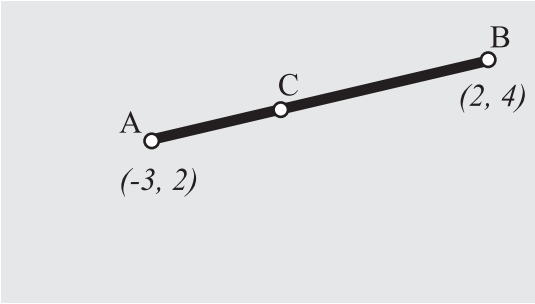


Рис. 4: Деление отрезка (пример)

Решение. Последовательно находим:

1. $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}$;
2. $\overline{AB} = (5, 2)$;
3. $\overline{AC} = \frac{2}{5}\overline{AB} = (2, \frac{4}{5})$;
4. $C = (-1, \frac{14}{5})$ (Ответ).

Нетрудно вывести и общую формулу для нахождения точки, делящей данный отрезок в данном отношении. Мы будем отождествлять каждую точку плоскости с вектором, идущим в нее из начала координат O, а формулу напишем в векторном виде, не расписывая ее по координатам.

Задача 2. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC : CB = \mu : \lambda$.

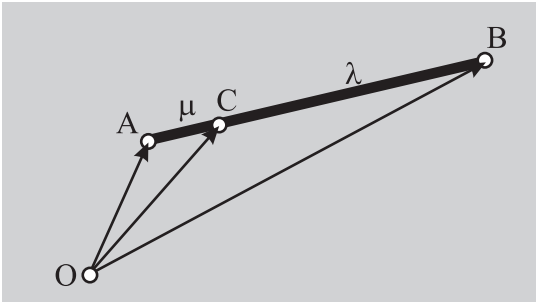


Рис. 5: Деление отрезка (общий случай)

Решение. Последовательно находим:

1. $\overline{AC} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\overline{AB} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}(B - A)$.
2. $C = A + \frac{\mu}{\mu+\lambda}(B - A) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}A + \frac{\mu}{\mu+\lambda}B$.

Таким образом, точку C можно найти по формуле

$$C = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}A + \frac{\mu}{\mu + \lambda}B$$

В случае $\mu = \lambda$, т.е. когда ищется середина отрезка, полученная формула становится особенно простой: *координаты середины отрезка есть полусуммы соответствующих координат его концов.* Полезно также иметь в виду *физический смысл* точки C: она совпадает с центром тяжести (правильнее, с центром масс) системы из двух точечных масс μ, λ, расположенных в точках B, A, соответственно.

Задача 3. Найти точку пересечения G медиан треугольника с вершинами $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-1, 0)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{AC}, AG = \frac{1}{3}\overline{AH}$, затем $G = (1, 2)$. См. рис. 6.

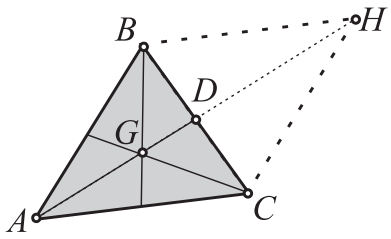


Рис. 6: Нахождение центра тяжести треугольника

4 Базисы на плоскости и в пространстве

Определение. Упорядочная пара непараллельных векторов на плоскости называется *базисом.* Прямые, на которых лежат эти векторы, называются *координатными осями.*

Напомним, что нулевой вектор $\overline{0}$ считается параллельным любому вектору, поэтому базисные векторы ненулевые).

Теорема 1. Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}$ образуют базис на плоскости. Тогда любой вектор $\overline{c}$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, где α, β – некоторые числа (называемые *координатами вектора* $\overline{c}$ в данном базисе). Более того, такое разложение единственно.

Доказательство. Отложим вектор $\overline{c}$ от начала координат O и проведем через его конец C прямые, параллельные векторам $\overline{b}$ и $\overline{a}$. Они пересекут (почему?) координатные оси в точках A и B, см. рис. 7. Из параллельности векторов и $\overline{OA}$ следует, что они пропорциональны. Поэтому найдется такое число α, что $\overline{OA} = \alpha\overline{a}$. Аналогично, $\overline{OB} = \alpha\overline{b}$. Поэтому $\overline{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Докажем единственность разложения. Пусть имеются два: $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ и $\overline{c} = \alpha'\overline{a} + \beta'\overline{b}$. Вычитая одно равенство из другого, получим $(\alpha' - \alpha)\overline{a} = (\beta' - \beta)\overline{b}$. Так как базисные вектора не параллельны, то такое равенство возможно только при $\alpha = \alpha'$ и $\beta' = \beta$. $\square$

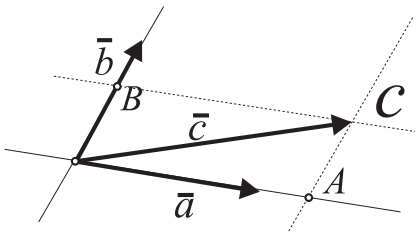


Рис. 7: Разложение вектора по базису

Задача 4. Разложить вектор $\overline{c} = (2, 4)$ по базису $\overline{a} = (2, 1), \overline{b} = (-1, 3)$.

Решение. Расписываем равенство $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ по координатам и решаем систему. Ответ: $= \frac{10}{7}\overline{a} + \frac{6}{7}\overline{b}$.

Отметим, что определитель этой системы отличен от 0, т.к. вектора $\overline{a}, \overline{b}$ не параллельны. Поэтому решение существует и единственно. Отсюда можно извлечь другое доказательство существования и единственности разложения вектора по базису.

Пространственный случай практически не отличается от плоского. Поэтому мы ограничимся кратким перечислением соответствующих определений и утверждений (утверждения нужно доказать самостоятельно).

1. Базис – это упорядоченная тройка некомпланарных (т.е. не параллельных одной плоскости) векторов;

2. Любой вектор $\overline{d}$ раскладывается по базису:

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}.$$

   При этом координаты (коэффициенты разложения) определены однозначно. См. рис. 8.

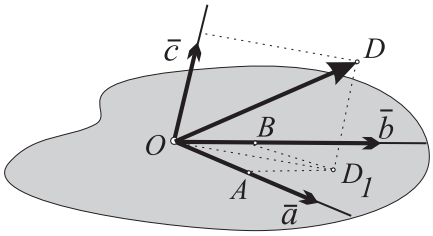


Рис. 8: Разложение пространственного вектора по базису

3. При практическом нахождении координат приходится решать систему 3-го порядка.

5 Скалярное произведение

Определение. Скалярное произведение двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:
$(\overline{a}, \overline{b}) = \mid \overline{a} \mid\mid \overline{b} \mid \cos\varphi$.

Всего имеются 4 возможных угла, см. рис. 9. Так как их косинусы равны, то можно взять любой.

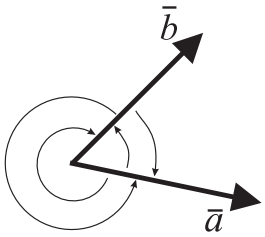


Рис. 9: Косинусы всех четырех углов равны

Выясним, как скалярное произведение записывается в координатах. Сначала мы сформулируем и докажем соответствующую теорему для плоского случая.

Теорема 2. Если $\overline{a} = (x_1, y_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2)$, то $(\overline{a}, \overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Доказательство. Найдем квадрат длины d отрезка AB (см. рис. 10) двумя способами.

1. По теореме Пифагора $d^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2$.
2. По теореме синусов $d^2 = \mid \overline{a} \mid^2 + \mid \overline{b} \mid^2 - 2 \mid \overline{a} \mid\mid \overline{b} \mid \cos\varphi$.

Расписывая $|a|, |b|$ в координатах, приравнивая полученные выражения и приводя подобные, получим требуемое. □

Словесно теорему 2 можно сформулировать так: скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений их координат. В такой формулировке она верна и для пространственного случая: если $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$,то $(\bar{a}, \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

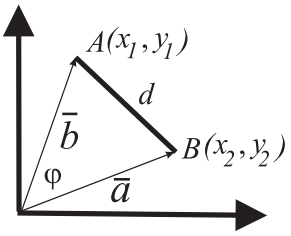


Рис. 10: Расстояние d можно найти двумя способами

Задача 5. Найти косинус угла между векторами (1,2) и (-3,1).

Решение. $\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-3+2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Задача 6. Найти вектор, перпендикулярный вектору (x, y).

Решение. Подходит как вектор $(-y, x)$, так и вектор $(y, -x)$. Эти вектора перпендикулярны данному вектору (x, y), так как их скалярные произведения на него равны 0. Отсюда получается простое правило для нахождения вектора, перпендикулярного данному: *нужно переставить координаты и у одной сменить знак.* Разумеется, перпендикулярный вектор можно умножать на любое число. При этом перпендикулярность сохраняется.

Задача 7. Острый или тупой угол между векторами $\bar{a} = (1, 2, 2)$ и $\bar{b} = (-1, 2, -1)$?

Ответ. $(\bar{a}, \bar{b}) = 1 > 0$, поэтому угол острый.

Свойства скалярного произведения.

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2. $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;
3. $(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$;
4. $(a, a) \geq 0$, причем $(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

Свойства 1,3,4 можно доказать как исходя из определения, так и с помощью координатной записи (проделайте это). Свойство 2 из определения извлечь трудно. В координатах оно доказывается так: нужно записать левую и правую часть в координатах и увидеть,что получится равенство.

Доказательство 4-го свойства: $(\bar{a}, \bar{a}) =| \bar{a} |^2 \geq 0$.

Задача 8. Докажите, что для любых векторов $\bar{m}, \bar{n}$ справедливо равенство.
$(\bar{m} + \bar{n}, 2\bar{m} - \bar{n}) = 2 \mid \bar{m} \mid^2 + (\bar{m}, \bar{n}) - \mid \bar{n} \mid^2$.

6 Проекции.

Определение. *Проекцией точки на прямую* ℓ называется основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ℓ.

Напомним, что *ось* – это направленная прямая.

Определение. *Скалярной проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* ℓ называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком '+', если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением ℓ, и со знаком '-', если нет. (A_1, B_1 – проекции точекA, B).

Определение. *Векторной проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* ℓ называется вектор A_1B_1.

Теорема 3. Скалярная проекция вектора $\bar{a}$ на ось ℓ равна $(\bar{a}, \bar{s})$, где $\bar{s}$ – единичный вектор оси ℓ. Вектрная проекция вектора $\bar{a}$ на ось ℓ равна $(\bar{a}, \bar{s})s$.

Доказательство. $(\bar{a}, \bar{s}) =| \bar{a} || \bar{s} | \cos\varphi =| \bar{a} | \cos\varphi = A_1B_1$, если $\cos\varphi \geq 0$. Если $\cos\varphi \leq 0$, то $(\bar{a}, \bar{s}) = -A_1B_1$, см. рис. 11a. Поэтому $(\bar{a}, \bar{s})$ есть скалярная проекция. Умножая ее на вектор $\bar{s}$, получаем векторную проекцию. □

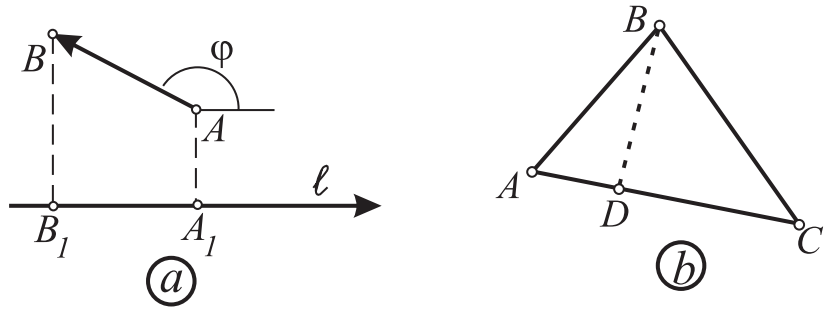


Рис. 11: a) Если угол φ тупой, то проекция отрицательна. b) Как находить проекцию на прямую.

Задача 9. Найти основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B, см. рис. 11b. Известно, что $A = (1, -1), B = (1, 2), C = (-2, 3)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB}, \overline{AC}$, $\bar{s} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$, $\overline{AD} = (\overline{AB}, \bar{s})\bar{s}$ и, наконец, $D = (-\frac{11}{25}, \frac{23}{25})$.

Определение. *Проекцией точки на плоскость* α называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

Определение. *Проекцией вектора* $\overline{BC}$ *на плоскость* α называется вектор $\overline{B'C'}$, где B', C' – проекции точек B, C, соответственно.

Полезно сопоставить определения различных проекций и четко понять, чем они отличаются. С. рис. 12.

7 Векторное произведение

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если с конца 3-го вектора вращение от 1-го ко 2-му кажется положительным (против часовой стрелки). См. рис. 13

Определение. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что:

1. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

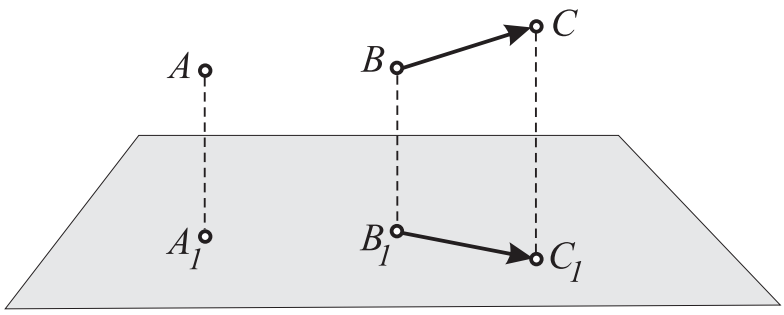


Рис. 12: Проекции точки и вектора на плоскость

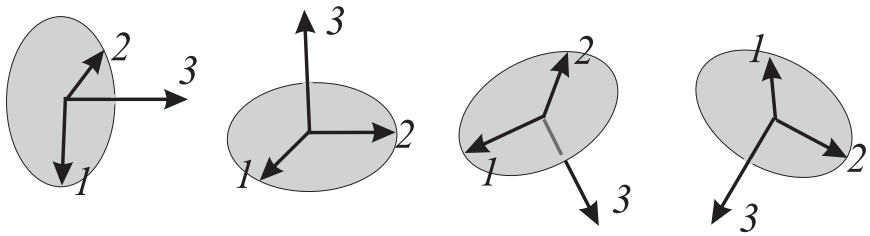


Рис. 13: Три правых и один левый базис в пространстве

2. Модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ обозначается $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Замечание. Приведенное выше определение нуждается в уточнении. Во-первых, чтобы условие 3 имело смысл, нужно все три вектора откладывать от одной точки. Во-вторых, как нам быть, если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ пропорциональны (когда не получается параллелограмма и понятие правой тройки не определено)? Выход таков: если $\bar{a}, \bar{b}$ пропорциональны, то мы по определению полагаем, что $[\bar{a}, \bar{b}]$ есть нулевой вектор.

Теорема 4. Векторное произведение любых двух векторов $\bar{a}, \bar{b}$ существует и единственно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда вектора $\bar{a}, \bar{b}$ не параллельны. Докажем, что вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям 1-3, существует и единственен. Будем считать, что вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ отложены от начала координат O.

Первое условие однозначно задает прямую, на которой обязан лежать вектор $\bar{c}$. Второе условие говорит о том, что конец вектора $\bar{c}$ может находиться в одной из двух точек, находящихся на расстоянии $\mid \bar{c} \mid$ от точки

O. Наконец, третье условие сообщает, какую из этих двух точек нужно выбрать. $\square$

Выясним, как векторное произведение записывается в координатах.

Теорема 5. Если $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство разобъем на три шага.

1. Проверим, что вектор $\bar{\Delta} = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$:

$$(\bar{\Delta}, \bar{a}) = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Точно так же $\bar{b} \perp \bar{\Delta}$.

2. Проверим, что $\mid \bar{\Delta} \mid$ равен $\mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid\mid \sin\varphi \mid$ (т.е. площади параллелограмма): $\mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid\mid \sin\varphi \mid = \mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid \sqrt{1 - \frac{(\bar{a}, \bar{b})^2}{|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2}} = \sqrt{\mid \bar{a} \mid^2 \mid \bar{b} \mid^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2} = \sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + {\Delta_2}^3}$.

Последнее равенство проверить самим, расписав его по координатам.

3. Докажем, что вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\Delta}$ образуют правую тройку. Для этого мы используем искусственный прием.

Будем непрерывно менять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, чтобы они оставались не параллельными друг другу и в результате перешли в вектора $\bar{i} = (1, 0, 0), \bar{j} = (0, 1, 0)$, соответственно (объясните, как это можно сделать). Тогда вектор $\bar{\Delta}$ тоже будет меняться и в результате перейдет в вектор

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \bar{k}.$$

Так как тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правая, то и исходная тройка тоже правая. Действительно, при изменении векторов $\bar{a}, \bar{b}$ тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\Delta}$ остается некомпланарной и вращение от $\bar{a}$ к $\bar{b}$, видимое с конца $\bar{\Delta}$, не меняет направления. $\square$

Свойства векторного произведения.

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;
2. $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$;
3. $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$;
4. $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны.

Свойства 1,3,4 можно доказать как исходя из определения, так и с помощью координатной записи (проделайте это). Свойство 2 из определения извлечь трудно. В координатах оно доказывается так: нужно записать левую и правую часть в координатах и увидеть,что получится равенство.

Полезно подчеркнуть, что площадь параллелограмма, построенного не двух векторах, равна модулю их векторного произведения. Это следует из определения.

Задача 10. Известно. что площадь параллелограмма,построенно на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна 1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$.

Решение. $S=\mid [2\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-3\bar{b}]\mid=\mid -6[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{b},\bar{a}]=\mid -7[\bar{a},\bar{b}]\mid=7$.

Задача 11. Найти координаты вектора, который перпендикулярен плоскости, проходящей через точки $A=(1,2,-1)$, $B=(3,2,0)$ и $C=(0,1,-1)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB},\overline{AC},[\overline{AB},\overline{AC}]$. Ответ: (1,-1,-2).

Задача 12. Найти площадь треугольника с вершинами $A=(-1,0,2)$, $B=(3,-1,0)$, $C=(2,1,1)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB},\overline{AC},[\overline{AB},\overline{AC}], S=\frac{1}{2}\mid[\overline{AB},\overline{AC}]\mid$. Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{62}$

Задача 13. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $a=(x_1,y_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2)$.

Решение. Добавим третью координату : $\bar{a}=(x_1,y_1,0),\bar{b}=(x_2,y_2,0),[\bar{a},\bar{b}]=\left(0,0,\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$. Поэтому $S=\frac{1}{2}\mid[\bar{a},\bar{b}]\mid=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right\|$.

Таким образом, площадь плоского треугольника равна модулю определителя матрицы, составленной из их координат. Можно придать смысл и знаку определителя: определитель положителен тогда и только тогда, когда вращение вдоль наименьшего угла от первого вектора ко второму происходит в положительном направлении.

8 Смешанное произведение

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число $(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$. Обозначение:$\langle\bar{a},\bar{b},\bar{c}\rangle$

Выясним, как смешанное произведение записывается в координатах.

Теорема 6. Если $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1),\bar{b}=(x_2,y_2,z_2),\bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $\langle\bar{a},\bar{b},\bar{c}\rangle=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. Расписать в координатах векторное и скалярное произведения. □

Свойства смешанного произведения.

1. При перестановке любых двух векторов смешанное проиведение меняет знак.
2. $\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\rangle = \langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{d}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\rangle$;
3. $\langle \alpha\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = \alpha\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;
4. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны $\Longleftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$.

Первое свойство получается из соответствующего свойства определителя третьего порядка. Свойства 2 – 4 можно вывести как из свойств определителей, так и из определения смешанного произведения. Например, четвертое свойство можно доказать так.

$\Longrightarrow$ Дано: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лежат в плоскости α. Возможны 2 случая:
1. $\bar{b} \| \bar{c}$, тогда их координаты пропорциональны, $[\bar{b}, \bar{c}] = \bar{0}$ и $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$;
2. $\bar{b} \nparallel \bar{c}$, тогда $[\bar{b}, \bar{c}] \perp \alpha$ и $[\bar{b}, \bar{c}] \perp a$, откуда опять следует, что $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$.
$\Longleftarrow$ Дано: $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$. Проведем плоскость α через $\bar{b}$ и $\bar{c}$.
Тогда $[\bar{b}, \bar{c}] \perp \alpha$ и, т.к. $a \perp [\bar{b}, \bar{c}]$, то $\bar{a}$ лежит в α.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 7. Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}$, и $\bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Доказательство. $| \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle | = | (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) | = | \bar{a} || [\bar{b}, \bar{c}] || \cos\varphi | = Sh = V$, т.к. $| [\bar{b}, \bar{c}] | = S$ и $| \bar{a} || \cos\varphi | = h$. См. рис. 14. □

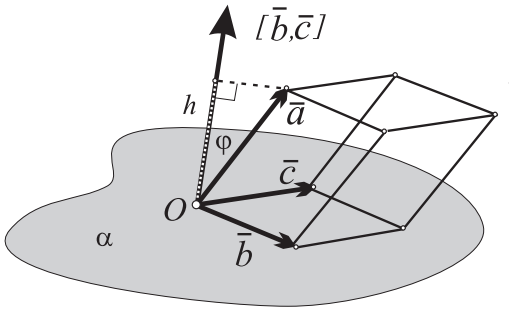


Рис. 14: Смешанное произведение равно объему

Отметим, что если $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, в противном случае – левая. Действительно, так как $(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) > 0$, то угол между векторами $\bar{a}$ и $[\bar{b}, \bar{c}]$ острый. Это означает, что вектор $\bar{a}$ смотрит в ту же сторону от плоскости α, что и вектор $[\bar{b}, \bar{c}]$.

Задача 14. Найти объем тетраэдра с вершинами $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (3, -1, 2)$ и $D = (0, -1, 1)$.

Решение. Находим $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, $V = \frac{1}{6} \mid \langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle \mid$. Ответ: $V = \frac{5}{6}$.

9 Координатные и параметрические уравнения кривых

Координатное уравнение кривой. Чтобы доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает кривую ℓ, нужно:

а) Доказать, что координаты любой точки на ℓ удовлетворяют уравнению;

б) Доказать, что координаты любой точки, не лежащей на ℓ не удовлетворяют уравнению.

(То же самое: если координаты точки удовлетворяют уравнению, то она лежит на ℓ).

Параметрические уравнения кривой.

Функции $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ задают кривую на плоскости следующим образом: фиксируем значение параметра t, получим два числа, или, что то же самое, точку на плоскости. Будем менять t. Тогда точка на плоскости будет двигаться и опишет некоторую кривую.

Задача 15. Постройте кривые $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 3t \end{cases}$.

Ответы: прямая, окружность, кривая Лиссажу, см. рис. 15.

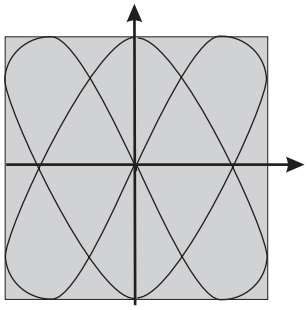


Рис. 15: Кривая Лиссажу

В пространстве одно координатное уравнение задает, как правило, поверхность, а параметрические уравнения – кривую. Например, уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ задает сферу, а уравнения $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ – винтовую линию.

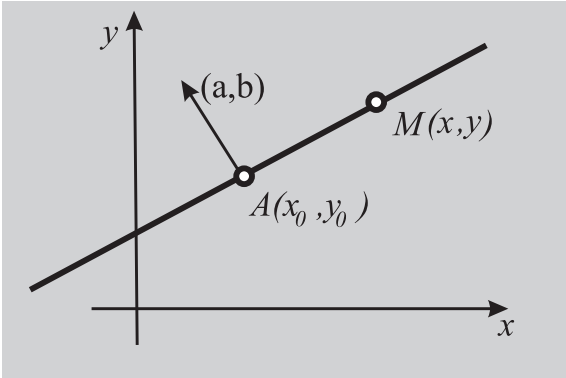


Рис. 16: Прямая ℓ проходит через точку A перпендикулярно вектору (a, b).

10 Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

.

Теорема 8. Если числа a и b одновременно не равны 0, то уравнение $ax + by + c = 0$ задает на плоскости прямую.

Доказательство. Найдем точку $A = (x_0, y_0)$, удовлетворяющую этому уравнению. (Почему такая существует?). Тогда уравнение можно переписать в виде $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, т.к. $c = -ax_0 - by_0$.

Через точку (x_0, y_0) проводим прямую ℓ, перпендикулярную вектору $\bar{n} = (a, b)$. Утверждаем, что уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ задает прямую ℓ .

а) Пусть точка $M = (x, y)$ лежит на ℓ, см. рис. 16.

Тогда вектор $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ лежит на ℓ , поэтому $\overline{AM} \perp (a, b)$ и их скалярное произведение равно 0, т.е. $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

б) Пусть точка $M = (x, y)$ не лежит на ℓ , тогда $\overline{AM} \not\perp (a, b)$ и $a(x - x_0) + b(y - y_0) \neq 0$. □

Определение. Ненулевой вектор, перпендикулярный прямой ℓ , называется *нормальным*, ненулевой вектор, лежащий на ℓ , называется *направляющим*.

Следствие из доказательства. Вектор (a,b) нормален прямой $ax + by + c = 0$

Задача 16. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A = (1, 2)$ и $B = (-3, 1)$.

Решение. $\overline{AB} = (-4, -1)$, нормальный вектор $\bar{n} = (1, -4)$, уравнение: $(x - 1) - 4(y - 2) = 0$ или $x - 4y + 7 = 0$.

В пространстве все то же самое:
а) Уравнение $ax + by + cz + d = 0$ задает плоскость (доказать самим).
б) Вектор (a, b, c) нормален ей.

Задача 17. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (1, -1, 0), B = (2, 3, -1), C = (0, 2, 2)$,

Решение. $\overline{AB} = (1, 4, -1), \overline{AC} = (-1, 3, 2), \bar{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = (11, -1, 7)$, уравнение $11(x - 1) - (y + 1) + 7z = 0$, или $11x - y + 7z - 12 = 0$.

Теорема 9. Расстояние от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой $ax+by+c = 0$ задается формулой

$$d = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказательство. Возьмем на прямой точку $M = (x, y,)$. Тогда расстояние равно модулю проекции вектора $\overline{AM}$ на нормаль к прямой, т.е. $d =\mid (\overline{AM}, \bar{s}) \mid$, где $s = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$. Так как $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\bar{n} = (a, b)$, то

$$d = \left| \frac{a(x-x_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $ax+by+cz+d = 0$ задается аналогичной формулой $\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (доказать самим).

Параметрические уравнения прямой.

Напомним, что радиус-вектор точки – это вектор, идущий в нее из начала координат. Координаты радиус-вектора совпадают с координатами его конца.

Пусть $\bar{r_0} = (x_0, y_0)$ – радиус-вектор фиксированной точки на прямой ℓ, $\bar{p} = (m, n)$ – ее направляющий вектор и $\bar{r} = (x, y)$ - радиус-вектор произвольной точки прямой. Тогда векторы $\bar{r} - \bar{r}_0$ и $\bar{p}$ параллельны. Поэтому $\bar{r} - \bar{r_0} = \bar{p}t$, т.е. $\bar{r} = \bar{r_0} + \bar{p}t$. Это - векторное уравнение прямой. Распишем его в координатах:
$x = x_0 + mt$
$y = y_0 + nt$
Это – параметрические уравнения прямой.

Задача 18. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A = (3, 1)$ и $B = (-1, 2)$.

Решение. $\bar{p} = \overline{AB} = (-4, 1)$. Уравнения:
$x = 3 - 4t$
$y = 1 + t$.
В пространстве то же самое: параметрические уравнения прямой имеют вид:
$x = x_0 + kt$

$y = y_0 + lt$
$z = z_0 + mt$,
где (x_0, y_0, z_0) – координаты любой точки на прямой, а (k, l, m) – координаты ее направляющего вектора.

Задача 19. Найти точку пересечения X прямой AB с плоскостью $2x - y + z - 4 = 0$, где $A = (1, 2, 0), B = (-3, 4, 1)$.

Решение. $\overline{AB} = (-4, 2, 1)$,
$x = 1 - 4t$
$y = 2 + 2t$
$z = t$
– параметрические уравнения прямой .
Подставляем: $2(1 - 4t) - (2 + 2t) + t - 4 = 0$ и находим t, а затем и x. Ответ: $X = (\frac{25}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{4}{9})$.

Задача 20. Написать параметрические уравнения прямой пересечения плоскостей $2x + y - z = 0$ и $3x + y + 2z - 1 = 0$.

Решение. Направляющий вектор $\bar{n} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$, где $\bar{n}_1 = (2, 1, -1)$ и $\bar{n} = (3, 1, 2)$. Чтобы найти какую-нибудь точку на прямой, полагаем $z = 0$ и находим x и y. Ответ:
$x = 1 + 3t$
$y = -2 - 7t$
$z = -t$
Координатные уравнения прямой в пространстве.

Теорема 10. Если числа k, l, m одновременно не обращаются в 0, то уравнения $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ задают в пространстве прямую с начальной точкой (x_0, y_0, z_0) и направляющим вектором (k, l, m).

Доказательство. Мы имеем систему из двух линейных уравнений, каждое из которых задает плоскость. Эти плоскости не параллельны (почему?), и поэтому пересекаются по прямой. Принадлежность точки (x_0, y_0, z_0) прямой проверяется подстановкой - получаются верные равенства $0 = 0 = 0$. Точка (x_0+k, y_0+l, z_0+m) также лежит на прямой (получаются равенства 1=1=1), поэтому соединяющий их вектор (k, l, m) является направляющим.

□

Отметим, что уравнениям можно придать смысл и при обращении в 0 чисел k, l, m (но не одновременно).

В заключение заметим, что большинство задач по линейной части аналитической геометрии можно решить с помощью комбинаций рассмотренных приемов.

Например, как найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми? Сначала нужно найти направляющие векторы прямых и их векторное произведение. Оно служит нормалью к плоскости, которая проходит

через одну прямую и параллельна второй прямой. Поэтому мы можем записать уравнение плоскости и затем найти расстояние до нее от какой-нибудь точки на первой прямой. Это число и будет ответом.

Другой пример. Как найти основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую в пространстве? Достаточно написать уравнение плоскости, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой, а затем найти точку пересечения плоскости и прямой.

11 Сведения из линейной алгебры

В этом разделе очень кратко излагаются сведения из линейной алгебры, которые понадобятся в начале второго семестра.

1. Определение. Оператор: переводит вектора в вектора.

2. Определение. Линейный оператор: сумму переводит в сумму и произведение на число – в произведение на число.

3. Определение. Базис на плоскости: пара непараллельных векторов. В пространстве: тройка некомпланарных векторов.

Характеристическое свойство: любой вектор раскладывается по базису. Коэффициенты разложения (т.е. координаты вектора) определяются однозначно.

4. Определение. Матрица оператора пишется так: берем первый базисный вектор, применяем оператор, результат раскладываем по базису, координаты пишем в первый столбик, и.т.д.

Примеры.

5. Теорема: Действие оператора на вектор заключается в умножении матрицы оператора на столбец координат вектора, т.е. $\bar{y} = A\bar{x}$.

Доказательство. Для базисных векторов верно по определению матрицы оператора, для всех других следует из линейности.

Эта теорема объясняет, зачем нужны матрицы.

6. Проанализируем, что происходит при замене одного базиса на другой.

Определение. Матрица перехода P_{ef} от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ пишется так: раскладываем вектора базиса $\mathbf{f}$ по базису $\mathbf{e}$ и координаты пишем в соответствующие столбцы.

7. Теорема. Координаты $\bar{x}_e$ вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathbf{e}$ и его же координаты $\bar{x}_f$ в базисе $\mathbf{f}$ связаны так: $\bar{x}_e = P_{ef}\bar{x}_f$.

Доказательство. Для векторов базиса $\mathbf{f}$ верно по определению матрицы перехода. Для всех других следует из линейности.

8. Теорема. Матрица A_e линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}$ связана с его же матрицей A_f в базисе $\mathbf{f}$ так:

$$A_f = P_{ef}^{-1} A_e P_{ef}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$. Тогда по вышеприведенным теоремам имеем:

$\bar{y}_e = P_{ef}\bar{y}_f, \bar{x}_e = P_{ef}\bar{x}_f, \bar{y}_e = A_f\bar{x}_e$. Это дает $\bar{y}_f = P_{ef}^{-1}A_eP_{ef}\bar{x}_f$. Сравним это равенство с равенством $\bar{y}_f = A_f\bar{x}_f$. Поскольку оба равенства справедливы для всех векторов $\bar{x}_f$, то $A_f = P_{ef}^{-1}A_eP_{ef}$.

9. Определение. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, если $\mathcal{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

Примеры. Объяснить, почему хорошо иметь базис из собственных векторов.

10. Определение. Характеристический многочлен матрицы A есть определитель матрицы $A - \lambda E$.

Объяснить, почему это многочлен, и какой степени. Примеры.

11. Теорема. Характеристический многочлен не зависит от базиса.

Доказательство. $|A_f - \lambda E| = |P_{ef}^{-1}A_eP_{ef} - \lambda E| = |P_{ef}^{-1}A_eP_{ef} - \lambda P_{ef}^{-1}EP_{ef} = |P_{ef}^{-1}(A_e - \lambda E)P_{ef}| = |P_{ef}^{-1}||A_e - \lambda E||P_{ef}| = |A_e - \lambda E|$.

12. Следствие: Коэффициенты характеристического многочлена матрицы оператора не зависят от базиса.

13. Объяснить смысл коэффициентов (след, сумма диагональных миноров, определитель).

14. Теорема. λ есть собственное число некоторого собственного вектора оператора $\mathcal{A}$ тогда и только когда оно есть корень характеристического многочлена.

Доказательство. Если корень, то матрица системы $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ вырождена, поэтому система имеет ненулевое решение. Обратно, если система имеет ненулевое решение, то определитель матрицы равен 0, т.е. λ есть корень.

12 Как решать аффинные задачи

Напомним, что аффинная система координат на плоскости задается началом и двумя независимыми векторами. Преобразование называется аффинным, если в некоторой аффинной система координат оно имеет вид $\bar{x} \to A\bar{x} + \bar{b}$, где $\bar{x}$ – столбец координат, A – невырожденная матрица порядка 2, а $\bar{b}$ – столбец свободных членов.

Свойства аффинных преобразований.

Любое аффинное преобразование

1. Переводит прямые в прямые;
2. Сохраняет параллельность прямых;
3. Сохраняет отношение, в котором точка делит отрезок;
4. Сохраняет отношение площадей.

Определение. Свойство фигуры называется аффинным, если оно сохраняется при аффинных преобразованиях. Например, свойство фигуры быть параллелограммом является аффинным, а свойство быть квадратом – нет.

Принцип решения аффинных задач. *Если задача про треугольник сформулирована в аффинных терминах, то ее достаточно решить для любого конкретного треугольника (например, прямоугольного или правильного).*

Список литературы

[1] Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // М., Наука, 1979.

[2] Беклемишев Л. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // М., Физматлит, 2000.

[3] Моденов П. С. Аналитическая геометрия // М., Наука, 1969.

[4] Постников М. М. Лекции по геометрии // Семестр I. М., Наука, 1983.

[5] Моденов П. С.,Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии // М., Наука, 1976.

Лекции по топологии

С.В. Матвеев

Лекция 1. Метрические пространства

1.1. Метрические пространства.

Топология - это раздел высшей геометрии. Она изучает свойства геометрических объектов, которые не меняются при непрерывных деформациях без разрывов и склеиваний.

Определение. Пусть M - произвольное множество. Отображение $\rho : M \times M \to R$ называется *метрикой* (или *расстоянием*) на M, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$; (симметричность)
2. $\rho(a,b) \geq 0$ и $\rho(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$; (положительность)
3. $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$ (неравенство треугольника).

Множество с заданной на нем метрикой называется *метрическим пространством.*

Определение. Пусть a - точка метрического пространства M и $r > 0$. Тогда подмножество $V_r(a) = \{x \in M : \rho(x,a) < r\}$ называется *открытым шаром радиуса r с центром в точке a.*

Пример трех метрик на плоскости.
Пусть точка a имеет координаты (a_1, a_2), точка b - координаты (b_1, b_2).

$$\rho_1(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2};$$

$$\rho_2(a,b) = \max(\mid a_1 - b_1 \mid, \mid a_2 - b_2 \mid);$$

$$\rho_3(a,b) = \mid a_1 - b_1 \mid + \mid a_2 - b_2 \mid;$$

Единичные шары для в этих метриках изображены на рис. 1.

Пример двух метрик на пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

$$\rho_1(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}; \qquad \rho_2(f,g) = \max_{x \in [0,1]} \mid (f(x) - g(x) \mid;$$

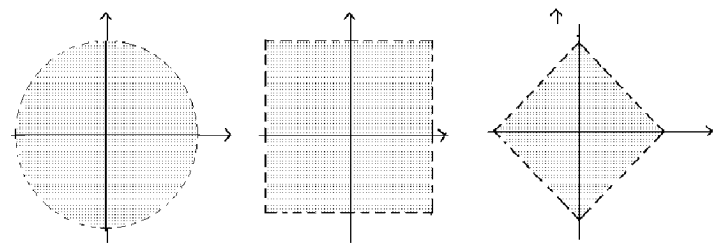


Figure 1:

Упражнение. Докажите, что приведенные 5 метрик действительно являются метриками.

1.1. Открытые множества.

Определение. Подмножество метрического пространства называется *открытым,* если каждая точка входит в него вместе с шаром положительного радиуса с центром в ней.

Упражнение. Докажите, что открытый шар является открытым множеством.

Свойства открытых множеств.

1. Объединение любого числа открытых множеств открыто;
2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
3. Пустое множество и все пространство являются открытыми.

Упражнение. Докажите эти свойства.

1.2. Непрерывные отображения.

Определение. 1. Отображение $f : M \to N$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in V_\delta(x_0)$ точка $f(x_0)$ лежит в шаре $V_\varepsilon(f(x_0))$. Ото-

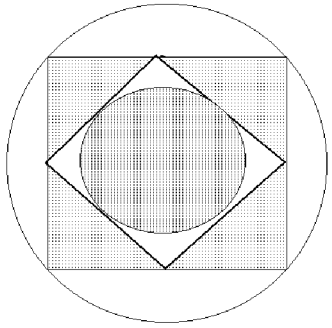


Figure 2:

бражение $f : M \to N$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках.

Определение. 2. Отображение $f : M \to N$ называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества U в N открыт в M.

Упражнение. Докажите эквивалентность этих определений.

Таким образом, для того, чтобы говорить о непрерывности отображения, нет нужды знать метрику, достаточно знать систему открытых множеств. Поэтому понятие открытого множества является более фундаментальным, чем понятие метрики.

Упражнение. Докажите, что три определенные выше метрики на плоскости задают одно и то же семейство открытых множеств. (Указание: см. рис. 2).

Лекция 2. Топологические пространства.

Определение. **Топологией** на множестве X называется такое семейство его подмножеств, что выполнены следующие аксиомы:

1. Объединение любого числа подмножеств семейства лежит в семей-

стве;

2. Пересечение конечного числа подмножеств семейства лежит в семействе;

3. Пустое множество и все пространство лежат в семействе.

Множества, лежащие в семействе, называется *открытыми*.

Определение. Множество с заданной на нем топологией называется *топологическим пространством*.

Упражнение. Приведите примеры различных топологий на множестве из двух точек.

2.1. Способы задания топологии.

1. На любом метрическом пространстве можно ввести топологию так, как как это описано в лекции 1. В этом случае говорят, что *топология индуцирована метрикой*.

2. Иногда открытые множества можно просто перечислить. Наиболее удобно это делать в случае, когда данное множество конечно или счетно.

3. Чаще всего топология задается с помощью указания *базы топологии*, т. е. такого семейства открытых множеств, что все другие открытые множества получаются из них операциями взятия объединения и конечного пересечения.

Упражнение. Пусть X - произвольное множество, и пусть $\mathcal{F}$ - произвольное семейство его подмножеств. Назовем подмножество множества X открытым, если его можно представить в виде объединения конечных пересечений подмножеств из семейства $\mathcal{F}$. Объявим также открытыми пустое множество и все множество X. Докажите, что получится топология, для которой семейство $\mathcal{F}$ служит базой.

4.*Индуцированная топология.* Пусть X - топологическое пространство и A - его произвольное подмножество. Назовем подмножество U множества A открытым, если оно имеет вид $U = A \cap V$, где V - некоторое открытое подмножество пространства X. Полученная топология на множестве A называется *индуцированной*.

Упражнение. Докажите, что индуцированная топология действи-

тельно является топологией.

5. *Фактортопология.* Пусть X - топологическое пространство, M - произвольное множество и $f : X \to M$ - произвольное отображение. Назовем подмножество $U \subset M$ открытым, если и только если его прообраз $f^{-1}(U)$ является открытым подмножеством пространства X. Полученная топология на множестве M называется *фактортопологией.* Иногда говорят, что она *индуцирована отображением* f.

Упражнение. Докажите, что фактортопология действительно является топологией, и что отображение f после введения топологии на M становится непрерывным.

Выделим частный случай фактортопологии.

Пусть $\sim$ - отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Тогда естественная проекция $p : X \to X/\sim$ пространства X на множество классов эквивалентности $X/\sim$ индуцирует на нем фактортопологию.

2.3. Непрерывные отображения и гомеомофизмы.

Определение. Отображение одного топологического пространства в другое называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

Определение. *Гомеоморфизм* - это биекция одного топологического пространства на другое, непрерывная в обе стороны.

Упражнение. Докажите, что суперпозиция двух непрерывных отображений непрерывна.

Упражнение. Докажите, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности.

Лекция 3. Замкнутые множества.

3.1. Свойства замкнутых множеств.

Определение. Подмножество топологического пространства называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

1. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;
3. Пустое множество и все пространство замкнуты.

Упражнение. Приведите пример множества на плоскости, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

Упражнение. Докажите свойства замкнутых множеств.

3.2. Замыкание, внутренность и граница.

Пусть X - топологическое пространство и $A \subset X$ - его подмножество.

Определение. Множество $Cl(A)$ называется *замыканием* множества A, если:
1. $Cl(A)$ замкнуто;
2. $Cl(A) \supset A$;
3. Любое другое замкнутое множество, которое содержит A, содержит $Cl(A)$.

Определение. Множество $Int(A) \subset A$ называется *внутренностью* множества A, если:
1. Оно открыто;
2. Оно содержится в A;
3. Любое другое открытое множество, которое лежит в A, лежит в $Int(A)$.

Определение. *Граница* $Fr(A)$ множества $A \subset X$ есть объединение таких точек $x \in X$, что каждая окрестность $U \ni x$ имеет непустое пересечение как с множеством A, так и с его дополнением.

Замечание. Слова *"окрестность точки"* равносильны словам *"открытое множество, содержащее данную точку"*.

Упражнение. Найдите внутренность, замыкание и границу полуинтервала на плоскости и полуинтервала на прямой.

Упражнение. Найдите внутренность, замыкание и границу множества всех точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

Теорема. Замыкание множества есть пересечение всех содержащих

его замкнутых множеств.

Доказательство. Так как пересечение замкнутых многообразий замкнуто, то оно содержит замыкание.

Замыкание тоже замкнуто, поэтому оно содержит пересечение.

Теорема. Для любого множества A выполняется равенство $A \cup Fr(A) = Cl(A)$.

Доказательство. Если точка x не лежит в $A \cup Fr(A)$, то ее некоторая окрестность не пересекает множества A. Поэтому множество $X - A \cup Fr(A)$ открыто и множество $A \cup Fr(A)$ замкнуто. Отсюда следует, что $Cl(A) \subset A \cup Fr(A)$.

Если точка x не лежит в замыкании, то ее окрестность $X - Cl(A)$ не содержит точек множества A. Поэтому она не содержится ни в множестве A, ни в его границе.

Упражнение. Верно ли, что $Cl(Int(A)) = Cl(A)$ и $Int(Cl(A)) = Int(A)$? Если нет, приведите контрпримеры.

3.3. Связность.

Определение. Топологическое пространство называется *связным,* если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

Упражнение. Дайте классификацию букв русского алфавита с точностью до гомеоморфизма.

Указание: В качестве различающих инвариантов используйте число компонент связности буквы, число компонент связности проколотой буквы, т.е. буквы с удаленной точкой, число компонент связности проколотой окрестности точки в букве.

Лекция 4. Аксиомы отделимости.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_0, если для любых двух его точек найдется окрестность одной из них, не содержащая вторую.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1, если для любых двух его точек найдется окрестность каждой из них, не содержащая вторую точку.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_2, если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_3, если для любой точки и не содержащего ее замкнутого множества найдутся непересекающиеся окрестности.

Определение. Топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4, если любые два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности.

См. рисунок 3.

Комментарии.

1. Аксиома T_0 называется *аксиомой Колмогорова.* Она обеспечивает различимость точек, если система открытых множеств известна.

2. Аксиома T_1 выполнена тогда и только тогда, когда каждая точка является замкнутым множеством. **(Приведите строгое доказательство.)**

3. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называется *хаусдорфовыми.*

4. Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называется *регулярными.*

5. Пространства, удовлетворяющие аксиома T_1 и T_4, называется *нормальными.*

Теорема. Нормальность $\Longrightarrow$ регулярность $\Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.

(Приведите строгое доказательство.)

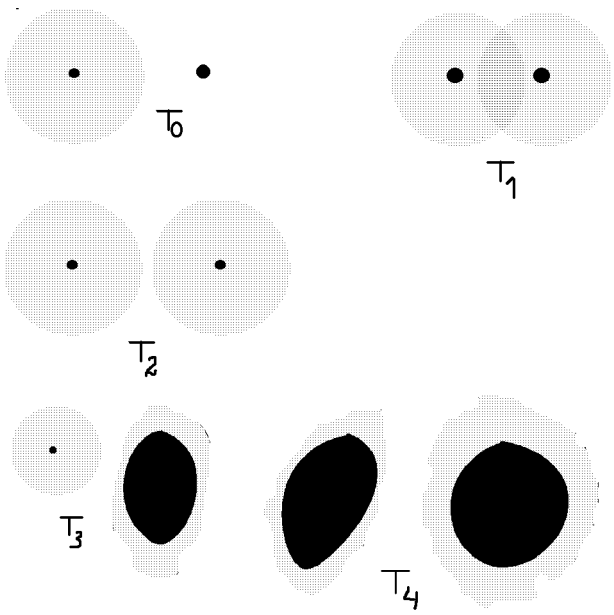


Figure 3: Аксиомы отделимости

Теорема. Все метрические пространства нормальны.

Доказательство. Для того, чтобы доказать аксиому T_1, достаточно взять шаровые окрестности данных точек, радиусы которых равны расстоянию между точками. Для проверки нормальности нам понадобится лемма.

Лемма. Функция расстояния

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

от точки x до данного множества A непрерывна.

Доказательство. Заметим, что неравенство треугольника

$$\rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \geq \rho(x, y)$$

после взятия инфимумов по $y \in A$ от обеих частей превращается в неравенство

$$\rho(x, x_0) + \rho(x_0, A) \geq \rho(x, A),$$

которое эквивалентно неравенству

$$\rho(x, A) - \rho(x_0, A) \leq \rho(x, x_0).$$

Аналогично,

$$\rho(x_0, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, x_0).$$

Поэтому

$$\mid \rho(x, A) - \rho(x_0, A) \mid \leq \rho(x, x_0).$$

Теперь для любого данного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$, и тогда из неравенства $\rho(x_0, x) < \delta$ будет следовать неравенство $\mid \rho(x_0, A) - \rho(x, A) \mid < \varepsilon$.

Лемма доказана.

Пусть теперь F_1, F_2 - непересекающиеся замкнутые множества. Тогда по лемме функции $\rho(x, F_1)$ и $\rho(x, F_2)$, а вместе с ними и функция $\varphi(x) = \rho(x, F_1) - \rho(x, F_1)$, непрерывны. Поэтому открытые множества $U_1 = \varphi^{-1}(0, \infty)$ и $U_2 = \varphi^{-1}(-\infty, 0)$ являются искомыми непересекающимися открытыми подмножествами. Теорема доказана.

Обратная теорема также справедлива, но при выполнении некоторого дополнительного условия.

Теорема. (Без доказательства). Любое нормальное топологическое пространство со счетной базой открытых множеств метризуемо.

Упражнение. Приведите пример двух замкнутых непересекающихся множеств на плоскости, расстояние между которыми равно 0.

Упражнение. Для каждого $i, 0 \leq i \leq 3$, приведите пример пространства, которое удовлетворяет аксиоме T_i, но не удовлетворяет аксиоме T_{i+1}.

Лекция 5. Компакты.

Определение. Семейство открытых подмножеств топологического пространства X называется *открытым покрытием,* если их объединение совпадает со всем X.

Определение. Топологическое пространство называется *компактом,* если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема. Подмножество пространства R^N является компактом (в индуцированной топологии) $\Longleftrightarrow$ оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. ($\Longrightarrow$). Пусть подмножество A является компактом. Рассмотрим его покрытие открытыми множествами $U_n = V_n(0) \cap A$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, а это означает, что A лежит в шаре с максимальным номером. Поэтому A ограничено.

Пусть теперь x - произвольная точка из $R^N - A$. Рассмотрим покрытие множества A открытыми множествами $U_n = (R^N - Cl(V_{1/n}(x))) \cap A$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, а это означает, что шар $V_{max(n)}(x)$ не пересекается с множеством A. Отсюда следует, что множество $R^N - A$ открыто, т. е. A замкнуто.

($\Longleftarrow$). Пусть A замкнуто и ограничено. Тогда оно содержится в некотором N-мерном кубе со стороной C. Допустим, что найдется покрытие $\{U_\alpha\}$ множества A, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Разобьем куб на 2^N равных кубов. Пересечение хотя бы одного из них с множеством A не покрывается конечным числом элементов покрытия. Разобьем его еще на 2^N равных кубов, опять выберем тот, пересечение которого с A не покрывается конечным числом элементов покрытия, и

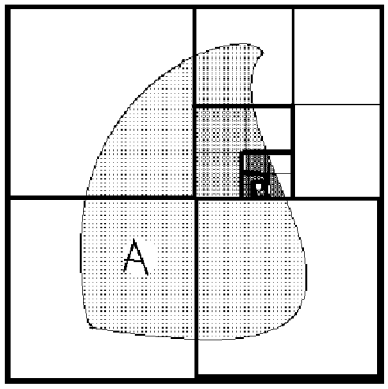


Figure 4:

т. д., см. рис. 4. В результате мы получим последовательность вложенных кубов со стороной, стремящейся к 0. Их пересечение состоит из ровно одной точки (**Почему?**. Обозначим эту точку через P. Так как A замкнуто, то эта точка лежит в нем (**Объясните, почему?**. Тогда она содержится в одном из множеств покрытия, и это множество содержит все достаточно малые кубы, содержащие точку P. Получили противоречие.

Лекция 6. Свойства компактов.

Теорема. Функция, непрерывная на компакте, ограничена. Доказательство.

Пусть функция $f : K \to R$ ограничена. Рассмотрим покрытие компакта множествами $U_n = f^{-1}(-n, n)$. Из этого покрытия можно выбрать конечное, а это означает, что $\mid f(x) \mid \leq n_{max}$.

Теорема. Функция, непрерывная на компакте, достигает наибольшего значения.

Доказательство. Пусть $y_0 = supf(x)$ не достигается. Рассмотрим покрытие компакта открытыми множествами $U_n = f^{-1}(-\infty, y_0 - 1/n)$. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, но тогда y_0 – не супремум, поскольку число $y_0 - 1/n_{max}$ заведомо больше всех значений функции.

Теорема. Образ компакта при произвольном непрерывном отображении является компактом.

Упражнение. Докажите эту теорему.

т Подмножество хаусдорфова компакта является компактом $\Longleftrightarrow$ оно замкнуто.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть A – замкнутое подмножество компакта K, и пусть $\{U_\alpha\}$ – его открытое покрытие. Каждое множество U_α имеет вид $U_\alpha = A \cap V_\alpha$, где V_α –открытые множества в K. Множества V_α вместе с множеством $K - A$ покрывают K. Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, но тогда конечное число соответствующих множеств U_α уже достаточно для покрытия множества A.

($\Longrightarrow$) Пусть подмножество A хаусдорфова компакта K является компактом. Пусть точка x не лежит в A. Из хаусдорфовости следует, что для любой точки $y \in A$ найдутся непересекающиеся окрестности $U_y(y)$ и $V_y(x)$. При этом открытые множества $U_y(y) \cap A$ покрывают A. Так как A -компакт, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. В этом случае пересечение соответствующих окрестностей $V_y(x)$ является окрестностью точки y, лежащей вне A. Это означает, что множество A замкнуто.

Упражнение. Приведите пример незамкнутого компакта, лежащего в компакте. (Указание: рассмотрите пространство их двух точек).

Теорема. Уплотнение (т. е. непрерывная биекция) хаусдорфова компакта является гомеоморфизмом.

Упражнение. Докажите эту теорему. (Указание: используйте предыдущую теорему и теорему о том, что образ компакта - компакт).

Лекция 7. Поверхности.

7.1 Многообразия.

Определение. Топологическое пространство называется*n-мерным многообразием*, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную пространству R^n или полупространству R^n_+.

Чтобы избежать патологических примеров, обычно требуют, чтобы многообразие было хаусдорфовым и имело счетную базу.

Определение. Объединение точек многообразия, имеющих окрестность второго типа, но не имеющих окрестность первого типа, называется *краем* многообразия и обозначается через ∂M.

Заметим, что сходство обозначений края и частной производной далеко не случайно.

Теорема. Край n-мерного многообразия является многообразием размерности $n-1$.

Мы оставляем эту теорему без доказательства, поскольку, несмотря на ее интуитивную очевидность, строгое доказательство довольно трудно.

Определение. Компактное многообразие с пустым краем называется*замкнутым*.

Нужно понимать, что слова "замкнутое множество" и "замкнутое многообразие" имеют совсем разный смысл.

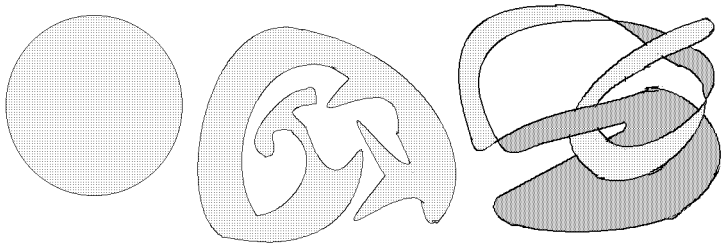
7.2. Примеры поверхностей.

Поверхность - это двухмерное многообразие.

Примером некомпактной поверхности может служить дополнение к любому замкнутому множеству на плоскости (например, к канторовому континууму).

Упражнение. Объясните, почему открытое множество на плоскости является многообразием.

Примерами компактных поверхностей с краем служат диск D^2 (мы



ски

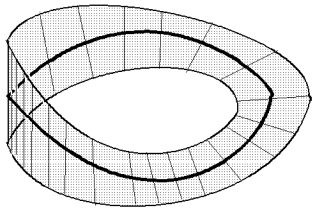


Figure 6: Лист Мебиуса

не называем его кругом, поскольку он может быть и не круглым, см. рис.5) и лист Мебиуса, см. рис.6.

Примерами замкнутых поверхностей служат сфера S^2 и проективная плоскость RP^2, которая получается из сферы удалением диска (после чего остается диск) и заклеиванием получившейся дырки листом Мебиуса, см. рис. 7.

Две бесконечные серии компактных поверхностей изображены на рис. 8.

Теорема. Любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из мо-

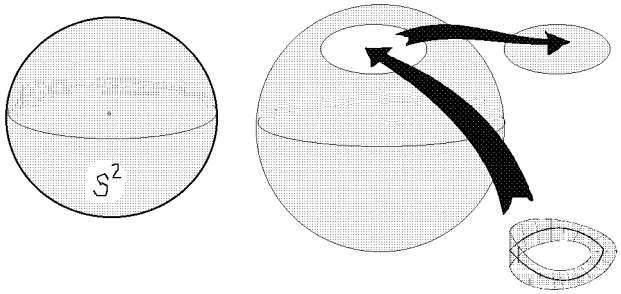


Figure 7: Сфера и проективная плоскость

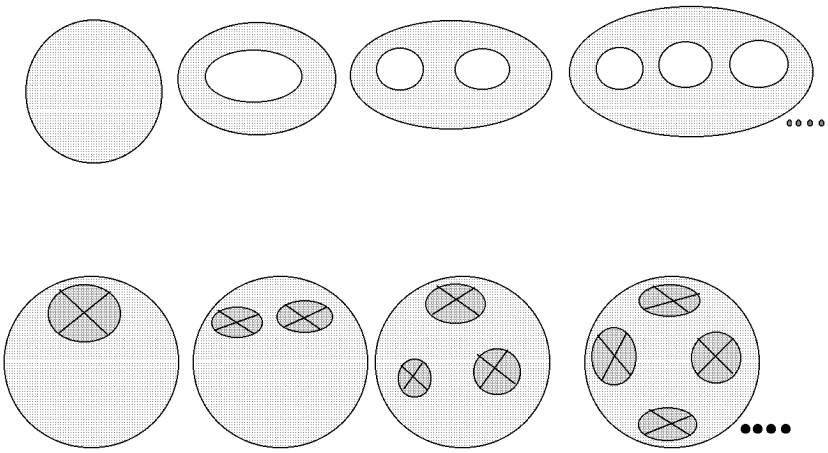


Figure 8: Модельные замкнутые поверхности

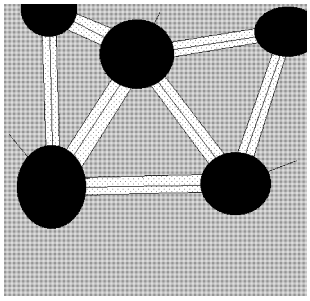


Figure 9:

дельных.

Доказательство.

1. По определению поверхности, любая поверхность локально устроена как плоскость (или как круг). Круг можно разбить на треугольники (триангулировать). Отсюда можно вывести (правда, не очень просто), что любая поверхность триангулируема.

2. Круговые окрестности вершин назовем *дисками*, окрестности ребер – *лентами*, оставшиеся части треугольников – *заплатами*. Таким образом, поверхность можно разбить на диски, ленты и заплаты.

3. Число дисков и лент можно уменьшить, объявляя два диска и соединяющую их ленту новым диском. Поэтому в связную поверхность можно получить из *одного* диска приклеиванием лент и заплат.

4. Число заплат можно свести к 1 с помощью двойственного рассуждения – путем объявления новой заплатой ленты и двух примыкающих к ней заплат.

5. Если лент нет, то поверхность есть сфера, если лента одна, то она должна быть перекручена, и мы имеем дело с проективной плоскостью, если лент две и они не перекручены, то так как край объединения диска

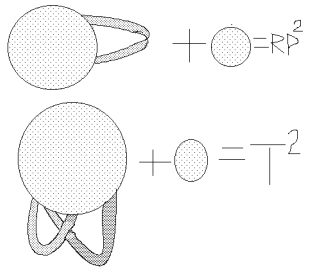


Figure 10:

с лентами должен состоять из одной окружности, то ленты должны быть *скрещены*, а тогда получается тор, см. рисунок 10.

6. В общем случае будем рассуждать так: допустим, что все ленты не перекручены. Тогда для каждой ленты L_1 найдется хотя бы одна лента L_2, которая с ней скрещивается. Заметим, что при *изотопии* (движении) основания следующей ленты по краю, поверхность не меняется, см. рис. 11.

За счет таких движений можно основания всех других лент вынести за пределы пары скрещенных лент L_1, L_2, т. е. *очистить* эту пару. Повторяя эту операцию несколько раз, мы придем к диску с несколькими чистыми парами скрещенных лент. Соответствующая поверхность гомеоморфна кренделю, род (число дырок) которого совпадает с числом пар скрещенных лент.

7. Допустим, что найдется хотя бы одна перекрученная лента. С помощью аналогичной операции очищения можно добиться, чтобы все ленты разбились на отдельные перекрученные ленты и на отдельные пары скрещенных лент. На рис. 12 хорошо видно, что если хотя бы одна перекрученная лента есть, то пару неперекрученных скрещенных лент

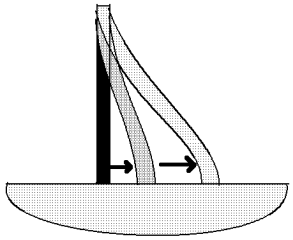


Figure 11:

можно заменить на пару отдельных перекрученных лент. В результате мы получим диск с несколькими отдельными перекрученными лентами. Ему соответствует сфера с листами Мебиуса, число которых совпадает с числом лент.

Теорема доказана.

Приведем пример применения теоремы классификации. Пусть R - *риманова поверхность* (т. е. график) многозначной комплексной функ-

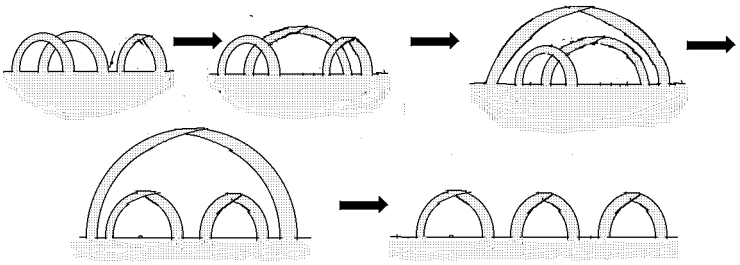


Figure 12:

ции $w = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$, рассматриваемой как отображение пополненной бесконечностью комплексной плоскости (т. е. комплексной сферы) на себя. Тогда R ориентируема (как всякая риманова поверхность). При переходе от сферы к поверхности R все точки удваиваются, кроме точек $z = 0, z = 1, z = 2, z = \infty$. Поэтому $\chi(R) = 2\chi(S^2) - 4 = 0$. Из теоремы классификации тогда следует, что поверхность R является тором.

Лекция 8. Различность модельных поверхностей.

Теорема. Все поверхности, изображенные на рис. 8, различны.

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что поверхности первой серии отличаются от поверхностей второй серии.

Определение. Поверхность называется *ориентируемой*, если она содержит лист Мебиуса. В противном случае поверхность называется *неориентируемой*.

Все поверхности второй серии неориентируемы, так как они по определению содержат по крайней мере один лист Мебиуса. Все поверхности первой серии ориентируемы. Действительно, каждая из них разбивает пространство R^3 на две части – внешнюю и внутреннюю. Поэтому они имеют по две стороны. Лист Мебиуса является односторонней поверхностью, поэтому он не может содержаться ни в одной из них. Этим первый этап закончен.

Перейдем ко второму этапу – доказательству того, что поверхности внутри каждой серии различны. Для этого нам понадобится понятие *эйлеровой характеристики*.

Определение. Пусть поверхность F разбита на треугольники так, что каждые два треугольника либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одной вершине, либо пересекаются по одному ребру. Такое разбиение называется *триангуляцией*. Тогда эйлеровой характеристикой поверхности F называется число

$$\chi(F) = в - р + г$$

, где $в$, $р$ и $г$ - числа вершин, ребер и граней триангуляции, соответственно.

Замечательное свойство эйлеровой характеристики: она является инвариантом гомеоморфизма. Это означает, что она не зависит от триангуляции и что характеристики гомеоморфных поверхностей равны.

Полезно отметить также, что эйлерову характеристику можно вычислять по разбиению на многоугольники, и что ее можно определить и для многомерных триангулированных пространств как альтернированную сумму чисел симплексов соответствующих размерностей. Все эти утверждения будут доказаны позднее.

Теорема. $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

Доказательство. Подсчитывая вершины, ребра и грани пространств A и B, мы считаем те из них, которые находятся в пересечении, дважды. Если их считать по одному разу, то получим числа вершин, ребер и граней объединения.

Следствие. Внутри каждой серии поверхности различны.

Доказательство. Применяя предыдущую теорему, легко вычислить эйлеровы характеристики всех модельных поверхностей. Ответ таков: характеристика поверхности кренделя рода n равна $2 - 2n$, характеристика сферы с n листами Мебиуса равна $2 - n$. Из различности характеристик следует различность поверхностей.

Задание поверхностей многоугольниками с попарно склеенными сторонами.

Рассмотрим многоугольник с четным числом сторон. Стороны разобьем на пары и пометим стороны каждой пары одинаковыми буквами. Произвольно ориентируем их, а затем склеим согласно выбранным ориентациям. В результате получим некоторое топологическое пространство X.

Теорема. Пространство X является замкнутой поверхностью.

Упражнение. Докажите эту теорему.

Чтобы определить тип поверхности, нужно вычислить ее эйлерову характеристику и узнать, ориентируема ли она. Число ребер всегда равно n, грань одна, а чтобы найти число вершин, нужно внимательно

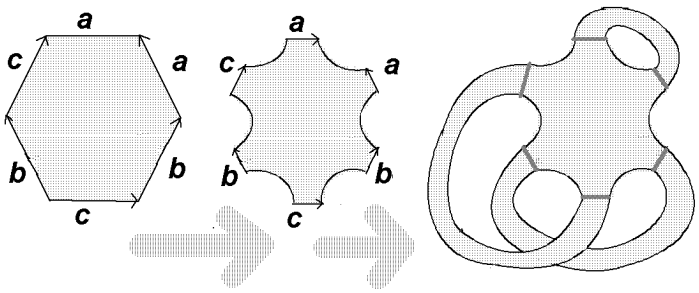


Figure 13:

посмотреть, какие вершины склеиваются между собой.

Лемма. Поверхность X неориентируема тогда и только тогда, когда найдутся две сонаправленные стороны одной пары.

Доказательство. Если сонаправленная пара сторон найдется, то окрестность дуги в многоугольнике, соединяющей их середины, после склеивания дает лист Мебиуса.

Допустим, что сонаправленных пар склеиваемых сторон нет. Отрежем от многоугольника уголки, что эквивалентно удалению из поверхности нескольких дисков. После этого склеивания противонаправленных сторон можно реализовать в плоскости приклеиванием неперекрученных лент, см. рис. 12. Поэтому поверхность ориентируема.